

16 Плотные, нигде не плотные множества
принцип вложенных шаров, понятие ка-
тегории, теорема Бэра-Хаусдорфа. Пример
вложенных шаров, имеющих пустое пересе-
чение

Если M нигде не плотный, if $\bar{E} = M$ и нигде не
плотный, if оно замкнуто, и оно не содержит
ни одного шара целиком

Если M нигде не плотный в M , if $\bar{E}$ не со-
держит ни одного шара

Мн-во E в M нигде не плотный 1-й категории,
if E можно представить как $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k -
нигде не плотные мн-ва. Все остальные мн-ва -
мн-ва 2-й категории

Лемма Замкн. мн-во нигде не плотно в $M \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow M \setminus \bar{F} = M$.

▲ $\Rightarrow$ F - нигде не плотно, $\exists G = M \setminus F, \bar{G} \neq M \Rightarrow$
 $\exists x \in M, x \in \bar{G} \Rightarrow x \in G \Rightarrow x \in F$, т.к. F не содержит
ни одного шара $\Rightarrow \forall (x, r) \cap G \neq \emptyset, \forall r > 0 \Rightarrow x$ - предель-
т. $G \Rightarrow x \in \bar{G}$ (!?)
▲ $\Leftarrow$ $\bar{G} = M$. От противного: $\exists \exists B(x, r) \subset F \Rightarrow B(x, r) \cap$
 $G = \emptyset \Rightarrow x \in \bar{G}$ (!?) ■

▼ (Принцип вложенных шаров) $\exists M$ - полное
метрич. пр-во; $B(x_1, r_1) \supset B(x_2, r_2) \supset \dots, r_n \rightarrow 0$. Тогда
 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \neq \emptyset$
▲ $d(x_n, x_{n+m}) \leq r_n, \forall m \geq 1$; т.к. $r_n \rightarrow 0$, то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундамент.
т.к. M - полное, то $\exists x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; $d(x_n, x_{n+m}) \leq r_n$;
 $m \rightarrow \infty: d(x_n, x) \leq r_n, \forall n \geq 1 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \ni x$ ■

▼ (Бэра-Хаусдорфа) Полное метрич. пр-во есть
мн-во 2-й категории
▲ От противного: $\exists M = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k$ - нигде не плотно.
 $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \Rightarrow \emptyset = M \setminus M = M \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (M \setminus E_k) \neq \emptyset$
по лемме $\Rightarrow$ (!?) ■

Пример (вложенных шаров, имеющих пустое пересечение)

$$M = \{1, 2, 3, \dots\} \quad d(n, m) = \begin{cases} 0, & n = m \\ 1 + \frac{1}{\min(n, m)}, & n \neq m \end{cases}$$

Проверим аксиомы метрики:

- 1) $d(n, m) \geq 0$, $\Leftrightarrow n = m$
- 2) $d(n, m) = d(m, n)$
- 3) $d(n, m) \leq d(n, k) + d(k, m)$

а) $m = n$ очевидно

б) $n \neq m$, $k = n$ или $k = m$ очев.

в) $n \neq m$, $k \neq n$, $k \neq m$

$$1 \leq d(n, m) \leq 2 \quad \forall n, m, n \neq m.$$

$$d(n, m) \leq 2 = 1 + 1 \leq d(n, k) + d(k, m), \quad k \neq n, k \neq m.$$

$$B(n, 1 + \frac{1}{n}) = \{m: d(n, m) < 1 + \frac{1}{n}\}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\min(n, m)} < 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \min(n, m) \neq n$$

$$\Rightarrow \{m \neq n\} \quad B(n, 1 + \frac{1}{n}) \supset B(n+1, 1 + \frac{1}{n+1})$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B(n, 1 + \frac{1}{n}) = \emptyset$$